**第一讲椭圆**

id:2147490761;FounderCES

题组1求椭圆的标准方程

1*.*[2015广东,8,5分]已知椭圆*+=*1(*m>*0)的左焦点为*F*1(*-*4,0),则*m=*()

A*.*2 B*.*3 C*.*4 D*.*9

2*.*[2013新课标全国Ⅰ,10,5分][理]已知椭圆*E*:*+=*1(*a>b>*0)的右焦点为*F*(3,0),过点*F*的直线交*E*于*A*,*B*两点*.*若*AB*的中点坐标为(1,*-*1),则*E*的方程为()

A*.+=*1 B*.+=*1 C*.+=*1 D*.+=*1

3*.*[2014安徽,14,5分][理]设*F*1,*F*2分别是椭圆*E*:*x*2*+=*1(0*<b<*1)的左、右焦点,过点*F*1的直线交椭圆*E*于*A*,*B*两点*.*若*|AF*1*|=*3*|F*1*B|*,*AF*2⊥*x*轴,则椭圆*E*的方程为*.*

4*.*[2016天津,19,14分][理]设椭圆*+=*1(*a>*)的右焦点为*F*,右顶点为*A.*已知*+=*,其中*O*为原点,*e*为椭圆的离心率*.*

(Ⅰ)求椭圆的方程;

(Ⅱ)设过点*A*的直线*l*与椭圆交于点*B*(*B*不在*x*轴上),垂直于*l*的直线与*l*交于点*M*,与*y*轴交于点*H.*若*BF*⊥*HF*,且∠*MOA*≤∠*MAO*,求直线*l*的斜率的取值范围*.*

5*.*[2014新课标全国Ⅰ,20,12分][理]已知点*A*(0,*-*2),椭圆*E*:*+=*1(*a>b>*0)的离心率为,*F*是椭圆*E*的右焦点,直线*AF*的斜率为,*O*为坐标原点*.*

(Ⅰ)求*E*的方程;

(Ⅱ)设过点*A*的动直线*l*与*E*相交于*P*,*Q*两点*.*当△*OPQ*的面积最大时,求*l*的方程*.*

题组2椭圆的几何性质问题

6*.*[2017浙江,2,4分]椭圆*+=*1的离心率是()

A. B. C. D.

7*.*[2016全国卷Ⅲ,11,5分][理]已知*O*为坐标原点,*F*是椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)的左焦点,*A*,*B*分别为*C*的左、右顶点*.P*为*C*上一点,且*PF*⊥*x*轴*.*过点*A*的直线*l*与线段*PF*交于点*M*,与*y*轴交于点*E.*若直线*BM*经过*OE*的中点,则*C*的离心率为()

A. B. C. D.

8*.*[2015福建,11,5分]已知椭圆*E*:*+=*1(*a>b>*0)的右焦点为*F*,短轴的一个端点为*M*,直线*l*:3*x-*4*y=*0交椭圆*E*于*A*,*B*两点*.*若*|AF|+|BF|=*4,点*M*到直线*l*的距离不小于,则椭圆*E*的离心率的取值范围是()

A.(0,] B.(0,] C.[,1) D.[,1)

9*.*[2013新课标全国Ⅱ,5,5分]设椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)的左、右焦点分别为*F*1,*F*2,*P*是*C*上的点,*PF*2⊥*F*1*F*2,∠*PF*1*F*2*=*30*°*,则*C*的离心率为()

A*.* B*.* C*.* D*.*

10*.*[2014江西,15,5分][理]过点*M*(1,1)作斜率为*-*的直线与椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)相交于*A*,*B*两点,若*M*是线段*AB*的中点,则椭圆*C*的离心率等于*.*

11*.*[2016浙江,19,15分][理]如图10*-*1*-*1,设椭圆*+y*2*=*1(*a>*1)*.*

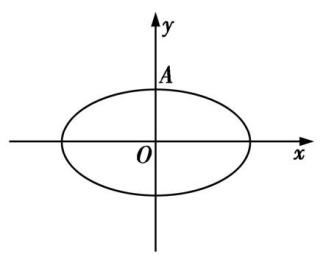


图10*-*1*-*1

(Ⅰ)求直线*y=kx+*1被椭圆截得的线段长(用*a*,*k*表示);

(Ⅱ)若任意以点*A*(0,1)为圆心的圆与椭圆至多有3个公共点,求椭圆离心率的取值范围*.*

id:2147490789;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018湖北八校联考,6]如图10*-*1*-*2,已知椭圆*C*的中心为原点*O*,*F*(*-*5,0)为*C*的左焦点,*P*为*C*上一点,满足*|OP|=|OF|*且*|PF|=*6,则椭圆*C*的方程为()

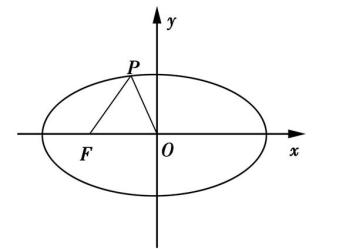


图10*-*1*-*2

A.*+=*1 B.*+=*1 C.*+=*1 D.*+=*1

2*.*[2018长郡中学选拔考试,5]已知椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)与圆*D*:*x*2*+y*2*-*2*ax+a*2*=*0交于*A*,*B*两点,若四边形*OADB*(*O*为原点)是菱形,则椭圆*C*的离心率为()

A. B. C. D.

3*.*[2018惠州市二调,10]设*F*1,*F*2为椭圆*+=*1的两个焦点,点*P*在椭圆上,若线段*PF*1的中点在*y*轴上,则的值为()

A. B. C. D.

4*.*[2017合肥市高三二检,8]已知椭圆*+=*1(*a>b>*0)的左、右焦点分别为*F*1,*F*2,离心率为*e.P*是椭圆上一点,满足*PF*2⊥*F*1*F*2,点*Q*在线段*PF*1上,且*=*2*.*若·*=*0,则*e*2*=*()

A.-1 B.2- C.2- D.-2

5*.*[2018长春市高三第一次质量监测,20]已知椭圆*C*的两个焦点为*F*1(*-*1,0),*F*2(1,0),且经过点*E*(,)*.*

(1)求椭圆*C*的标准方程;

(2)过点*F*1的直线*l*与椭圆*C*交于*A*,*B*两点(点*A*位于*x*轴上方),若*=λ*,且2≤*λ<*3,求直线*l*的斜率*k*的取值范围*.*

6*.*[2018南昌市调研,20]已知椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)的离心率为,短轴长为2*.*

(1)求椭圆*C*的标准方程;

(2)设直线*l*:*y=kx+m*与椭圆*C*交于*M*,*N*两点,*O*为坐标原点,若*kOM*·*kON=*,求原点*O*到直线*l*的距离的取值范围*.*

**B组提升题**

7*.*[2018南宁市摸底联考,10]已知椭圆*+=*1(*a>b>*0)的一条弦所在的直线方程是*x-y+*5*=*0,且弦的中点是*M*(*-*4,1),则椭圆的离心率是()

A. B. C. D.

8*.*[2018贵阳市高三摸底考试,12]椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)的左顶点为*A*,右焦点为*F*,过点*F*且垂直于*x*轴的直线交*C*于*P*,*Q*两点,若cos∠*PAQ=*,则椭圆*C*的离心率*e*为()

A. B. C. D.

9*.*[2017石家庄二模,11]已知动点*P*在椭圆*+=*1上,若点*A*的坐标为(3,0),点*M*满足*||=*1,·*=*0,则*||*的最小值是()

A. B. C.2 D.3

10*.*[2017甘肃二诊,20]已知椭圆*C*:*+=*1(*a>b>*0)的顶点到直线*l*:*y=x*的距离分别为,*.*

(1)求椭圆*C*的离心率;

(2)过圆*O*:*x*2*+y*2*=*4上任意一点*P*作椭圆*C*的两条切线*PM*和*PN*分别与圆*O*交于点*M*,*N*,求△*PMN*面积的最大值*.*

**答案**

id:2147494440;FounderCES

1*.*B由4*=*(*m>*0),得*m=*3,故选B*.*

2*.*D因为直线*AB*过点*F*(3,0)和点(1,*-*1),所以直线*AB*的方程为*y=*(*x-*3)*①*,将*①*代入椭圆方程*+=*1并消去*y*,得(*+b*2)*x*2*-a*2*x+a*2*-a*2*b*2*=*0,所以*AB*的中点的横坐标为*=*1,即*a*2*=*2*b*2*.*因为*a*2*=b*2*+c*2,所以*b=c=*3,所以*a*2*=*18*.*故选D*.*

3*.x*2*+=*1设点*A*在点*B*上方,*F*1(*-c*,0),*F*2(*c*,0),其中*c=*,则可设*A*(*c*,*b*2),*B*(*x*0,*y*0),由*|AF*1*|=*3*|F*1*B|*,可得*=*3,故即代入椭圆方程可得*+b*2*=*1,解得*b*2*=*,故椭圆方程为*x*2*+=*1*.*

4*.*(Ⅰ)设*F*(*c*,0),由*+=*,即*+=*,可得*a*2*-c*2*=*3*c*2,又*a*2*-c*2*=b*2*=*3,所以*c*2*=*1,因此*a*2*=*4*.*

所以椭圆的方程为*+=*1*.*

(Ⅱ)设直线*l*的斜率为*k*(*k*≠0),则直线*l*的方程为*y=k*(*x-*2)*.*

设*B*(*xB*,*yB*),由方程组消去*y*,整理得(4*k*2*+*3)*x*2*-*16*k*2*x+*16*k*2*-*12*=*0,解得*x=*2或*x=*,由题意得*xB=*,从而*yB=.*由(*Ⅰ*)知,*F*(1,0)*.*设*H*(0,*yH*),则*=*(*-*1,*yH*),*=*(,)*.*

由*BF*⊥*HF*,得·*=*0,所以*+=*0,解得*yH=.*因此直线*MH*的方程为*y=-x+.*

设*M*(*xM*,*yM*),由方程组消去*y*,解得*xM=.*

在△*MAO*中,∠*MOA*≤∠*MAO*⇔*|MA|*≤*|MO|*,即(*xM-*2)2*+*≤*+*,化简得*xM*≥1,即≥1,解得*k*≤*-*或*k*≥*.*

所以直线*l*的斜率的取值范围为(*-∞*,*-*]∪[,*+∞*)*.*

5*.*(Ⅰ)设*F*(*c*,0),由条件知,*=*,得*c=.*

又*=*,所以*a=*2,*b*2*=a*2*-c*2*=*1*.*

故*E*的方程为*+y*2*=*1*.*

(Ⅱ)当*l*⊥*x*轴时不合题意,故设*l*:*y=kx-*2,*P*(*x*1,*y*1),*Q*(*x*2,*y*2)*.*

将*y=kx-*2代入*+y*2*=*1,得(1*+*4*k*2)*x*2*-*16*kx+*12*=*0,

当*Δ=*16(4*k*2*-*3)*>*0,即*k*2*>*时,*x*1,2*=.*

从而*|PQ|=|x*1*-x*2*|=.*

又点*O*到直线*PQ*的距离*d=* ,

所以△*OPQ*的面积*S*△*OPQ=d*·*|PQ|=* *.*

设*=t*,则*t>*0,*S*△*OPQ==* *.*

因为*t+*≥4,当且仅当*t=*2,即*k=±*时等号成立,且满足*Δ>*0*.*

所以当△*OPQ*的面积最大时,*l*的方程为*y=x-*2或*y=-x-*2*.*

6*.*B根据题意知,*a=*3,*b=*2,则*c==*,所以椭圆的离心率*e==*,故选B*.*

7*.*A设*E*(0,*m*),则直线*AE*的方程为*-+=*1,由题意可知*M*(*-c*,*m-*),(0,)和*B*(*a*,0)三点共线,则*=*,化简得*a=*3*c*,则*C*的离心率*e==.* 故选A*.*

8*.*A设椭圆的左焦点为*F*1,半焦距为*c*,连接*AF*1,*BF*1,则四边形*AF*1*BF*为平行四边形,所以*|AF*1*|+|BF*1*|=|AF|+|BF|=*4*.*根据椭圆定义,有*|AF*1*|+|AF|+|BF*1*|+|BF|=*4*a*,所以8*=*4*a*,解得*a=*2*.*因为点*M*到直线*l*:3*x-*4*y=*0的距离不小于,即≥,*b*≥1,所以*b*2≥1,所以*a*2*-c*2≥1,4*-c*2≥1,解得0*<c*≤,所以0*<*≤,所以椭圆的离心率的取值范围为(0,]*.*故选A*.*

9*.*D解法一由题意可设*|PF*2*|=m*,结合条件可知*|PF*1*|=*2*m*,*|F*1*F*2*|=m*,故离心率*e=====.*故选D*.*

解法二由*PF*2⊥*F*1*F*2可知*P*点的横坐标为*c*,将*x=c*代入椭圆方程可解得*y=±*,所以*|PF*2*|=.*由∠*PF*1*F*2*=*30*°*可得*|F*1*F*2*|=|PF*2*|*,故2*c=*·,变形可得(*a*2*-c*2)*=*2*ac*,等式两边同除以*a*2,得(1*-e*2)*=*2*e*,解得*e=*或*e=-*(舍去)*.*故选D*.*

10*.* 设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),分别代入椭圆方程相减得*+=*0,根据题意有*x*1*+x*2*=*2*×*1*=*2,*y*1*+y*2*=*2*×*1*=*2,且*=-*,所以*+×*(*-*)*=*0,得*a*2*=*2*b*2,所以*a*2*=*2(*a*2*-c*2),整理得*a*2*=*2*c*2,得*=*,所以*e=.*

11*.*(Ⅰ)设直线*y=kx+*1被椭圆截得的线段为*AP*,由得(1*+a*2*k*2)*x*2*+*2*a*2*kx=*0,

故*x*1*=*0,*x*2*=-.*

因此*|AP|=|x*1*-x*2*|=*·*.*

(Ⅱ)假设圆与椭圆的公共点有4个,由对称性可设*y*轴左侧的椭圆上有两个不同的点*P*,*Q*,满足*|AP|=|AQ|.*

记直线*AP*,*AQ*的斜率分别为*k*1,*k*2,且*k*1,*k*2*>*0,*k*1≠*k*2*.*

由(*Ⅰ*)知,*|AP|=*,*|AQ|=*,

故*=*,

所以(*-*)[1*+++a*2(2*-a*2)]*=*0*.*

由于*k*1≠*k*2,*k*1,*k*2*>*0,所以1*+++a*2(2*-a*2)*=*0,

因此(*+*1)(*+*1)*=*1*+a*2(*a*2*-*2)*①*,

因为*①*式关于*k*1,*k*2的方程有解的充要条件是1*+a*2(*a*2*-*2)*>*1,

所以*a>.*

因此,任意以点*A*(0,1)为圆心的圆与椭圆至多有3个公共点的充要条件为1*<a*≤,

由*e==*,得所求离心率的取值范围为0*<e*≤*.*

id:2147494447;FounderCES

**A组基础题**

1.C由题意可得*c=*5,设右焦点为*F'*,连接*PF'*,由*|OP|=|OF|=|OF'|*知,∠*PFF'=*∠*FPO*,

∠*OF'P=*∠*OPF'*,*∴*∠*PFF'+*∠*OF'P=*∠*FPO+*∠*OPF'*,*∴*∠*FPO+*∠*OPF'=*90*°*,即*PF*⊥*PF'.*在Rt△*PFF'*中,由勾股定理,得*|PF'|===*8,

由椭圆的定义,得*|PF|+|PF'|=*2*a=*6*+*8*=*14,从而*a=*7,*a*2*=*49,

于是*b*2*=a*2*-c*2*=*49*-*52*=*24,*∴*椭圆*C*的方程为*+=*1,故选C*.*

2*.*B由已知可得圆*D*:(*x-a*)2*+y*2*=a*2 ,圆心*D*(*a*,0),则菱形*OADB*对角线的交点的坐标为(,0),将*x=*代入圆*D*的方程得*y=±.*不妨设点*A*在*x*轴上方,即*A*(,),代入椭圆*C*的方程可得*+=*1,所以*a*2*=b*2*=a*2*-c*2,解得*a=*2*c*,所以椭圆*C*的离心率*e==.*故选B

3*.*B由题意知*a=*3,*b=.*由椭圆定义知*|PF*1*|+|PF*2*|=*6*.*在△*PF*1*F*2中,因为*PF*1的中点在*y*轴上,*O*为*F*1*F*2的中点,由三角形中位线性质可得*PF*2⊥*x*轴,所以*|PF*2*|==*,所以*|PF*1*|=*6*-|PF*2*|=*,所以*=*,故选B*.*

4*.*C因为·*=*0,所以*F*2*Q*⊥*PF*1,易知△*F*2*QF*1∽△*PF*2*F*1,所以*=*,即*|F*1*Q|*·*|F*1*P|=|F*1*F*2*|*2*.*因为*=*2,所以*|F*1*Q|=|F*1*P|*,所以*|F*1*P|*2*=|F*1*F*2*|*2*=*4*c*2,即*|F*1*P|=c*,在Rt△*PF*1*F*2中,由勾股定理可得*|PF*2*|=c.*由椭圆定义可知,*|PF*1*|+|PF*2*|=c+c=*2*a*,所以*e===*,所以*e*2*=*2*-*,故选C*.*

5*.*(1)根据题意,设椭圆*C*的标准方程为*+=*1(*a>b>*0),则解得

所以椭圆*C*的方程为*+=*1*.*

(2)根据题意可设直线*l*的方程为*y=k*(*x+*1)(*k>*0),

联立方程,得消去*x*,得(*+*4)*y*2*-y-*9*=*0,

*Δ=+*144*>*0*.*

设*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2),则*y*1*+y*2*=　①*,*y*1*y*2*=　②*,

又*=λ*,所以*y*1*=-λy*2*③.*把*③*代入*①*得*y*1*=*,*y*2*=*,并结合*②*可得*y*1*y*2*==*,则*=*,即*λ+-*2*=.*

因为2≤*λ<*3,所以≤*λ+-*2*<*,

即≤*<*,且*k>*0,解得0*<k*≤*.*

故直线*l*的斜率*k*的取值范围是(0,]*.*

6*.*(1)由题意知2*b=*2,*∴b=*1*.*∵*e==*,*a*2*=b*2*+c*2,*∴a=*2*.*

*∴*椭圆*C*的标准方程为*+y*2*=*1*.*

(2)设*M*(*x*1,*y*1),*N*(*x*2,*y*2),联立方程,得消去*y*,得(4*k*2*+*1)*x*2*+*8*kmx+*4*m*2*-*4*=*0,*Δ=*(8*km*)2*-*4(4*k*2*+*1)(4*m*2*-*4)*>*0,化简得*m*2*<*4*k*2*+*1*①*,

*x*1*+x*2*=-*,*x*1*x*2*=*,

*y*1*y*2*=*(*kx*1*+m*)(*kx*2*+m*)*=k*2*x*1*x*2*+km*(*x*1*+x*2)*+m*2*.*

若*kOM*·*kON=*,则*=*, 即4*y*1*y*2*=*5*x*1*x*2,

*∴*4*k*2*x*1*x*2*+*4*km*(*x*1*+x*2)*+*4*m*2*=*5*x*1*x*2,*∴*(4*k*2*-*5)·*+*4*km*·(*-*)*+*4*m*2*=*0,

即(4*k*2*-*5)(*m*2*-*1)*-*8*k*2*m*2*+m*2(4*k*2*+*1)*=*0,化简得*m*2*+k*2*=　②*,

由*①②*得0≤*m*2*<*,*<k*2≤*.*

∵原点*O*到直线*l*的距离*d=*,

*∴d*2*===-*1*+.*

又*<k*2≤,*∴*0≤*d*2*<*,*∴*0≤*d<.*

*∴*原点*O*到直线*l*的距离的取值范围是[0,)*.*

**B组提升题**

7*.*C设直线*x-y+*5*=*0与椭圆*+=*1相交于*A*(*x*1,*y*1),*B*(*x*2,*y*2)两点,因为*AB*的中点是*M*(*-*4,1),所以*x*1*+x*2*=-*8,*y*1*+y*2*=*2*.*易知直线*AB*的斜率*k==*1*.*因为所以两式相减可得*+=*0,所以*=-*·,所以*=*,于是椭圆的离心率*e===*,故选C*.*

8*.*A根据题意可取*P*(*c*,),*Q*(*c*,*-*),

所以tan∠*PAF=====*1*-e.*

因为cos∠*PAQ=*cos 2∠*PAF=*cos2∠*PAF-*sin2∠*PAF====*,所以5*-*5(1*-e*)2*=*3*+*3(1*-e*)2⇒8(1*-e*)2*=*2⇒(1*-e*)2*=.*

又椭圆的离心率*e*的取值范围为(0,1),所以1*-e=*,解得*e=.*故选A*.*

9*.*C由*||=*1可知点*M*的轨迹是以点*A*为圆心,1为半径的圆,过点*P*作该圆的切线*PM*,则·*=*0,*|PA|*2 *=|PM|*2 *+|AM|*2,得*|PM|*2 *=|PA|*2 *-*1,所以要使*||*取得最小值,需使*||*取得最小值,而*||*的最小值为6*-*3*=*3,此时点*P*为椭圆右顶点,且*||=*2,故选C*.*

10*.*(1)由直线*l*的方程知,直线*l*与两坐标轴的夹角均为45*°*,

故长轴端点到直线*l*的距离为,短轴端点到直线*l*的距离为,由得*a=*,*b=*1,所以*c=.*

所以椭圆*C*的离心率*e===.*

(2)设点*P*(*xP*,*yP*),则*+=*4*.*

(i)若两条切线中有一条切线的斜率不存在,则*xP=±*,

*yP=±*1,

另一条切线的斜率为0,从而*PM*⊥*PN.*

此时,*S*△*PMN=|PM|*·*|PN|=×*2*×*2*=*2*.*

(ii)若切线的斜率均存在,则*xP*≠*±*,

设过点*P*的椭圆的切线方程为*y-yP=k*(*x-xP*),

代入椭圆方程,消去*y*并整理得(3*k*2*+*1)*x*2*+*6*k*(*yP-kxP*)*x+*3*-*3*=*0*.*

依题意*Δ=*0,得(3*-*)*k*2*+*2*xPyPk+*1*-=*0*.*

设切线*PM*,*PN*的斜率分别为*k*1,*k*2,从而*k*1*k*2*===-*1,即*PM*⊥*PN*,线段*MN*为圆*O*的直径,则*|MN|=*4*.*

所以*S*△*PMN=|PM|*·*|PN|*≤(*|PM|*2*+|PN|*2)*=|MN|*2*=*4,

当且仅当*|PM|=|PN|=*2时,*S*△*PMN*最大,最大值为4*.*

综合(i)(ii)可得,△*PMN*面积的最大值为4*.*